# Notas del Curso Propedéutico

Jaime A. Moreno
Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM)
Instituto de Ingeniería, México D.F.,México
Email: JMorenoP@ii.unam.mx

7 de Marzo de 2016

# Índice general

# Parte I

# Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

# Lección 1

# Conceptos básicos

## 1.1. Ecuaciones

- **Ecuación:** Igualdad que contiene una o varias variables (incógnitas).

$$P(y) = Q(y)$$

  - $P(\cdot), Q(\cdot)$: Operaciones
  - $y$: variables (incógnitas)

$$y^2 = 4$$

- **Soluciones:** Conjunto de valores de las incógnitas que hacen verdadera la igualdad.

$$\{y = 2,\ y = -2\}$$

- **Identidad:** Ecuación válida para todos los valores de las incógnitas.

$$\begin{aligned} y_1^2 - y_2^2 &= (y_1 + y_2)(y_1 - y_2) \\ \sin^2(y) + \cos^2(y) &= 1 \end{aligned}$$

- **Ecuaciones Equivalentes:** Dos ecuaciones que tienen el mismo conjunto solución.

- **Sistema de ecuaciones:** Conjunto de ecuaciones simultáneas en las mismas variables

$$\begin{aligned} P_1(y) &= Q_1(y) \\ P_2(y) &= Q_2(y) \\ &\vdots \\ P_m(y) &= Q_m(y) \end{aligned}$$

Ejemplo:

$$\begin{aligned} 3y_1 + 5y_2 &= 2 \\ 5y_1 + 8y_2 &= 3 \end{aligned}$$

- **Soluciones:** Conjunto de valores de las incógnitas que hacen verdaderas a todas las igualdades.

$$\{y_1 = -1,\ y_2 = 1\}$$

### 1.1.1. Tipos de Ecuaciones

Clasificación de acuerdo a los tipos de Operaciones $(P(\cdot), Q(\cdot))$ y al tipo de Variables $y$

- **Univariables o Multivariables:** una o múltiples variables.

- Ejemplo Univariable:

$$y^5 - 3y + 1 = 0$$

- Ejemplo Multivariable

$$y_1^4 + \frac{1}{2}y_1 y_2 = \frac{1}{3}y_2^3 - y_1^2 y_2 + y_2^2 - \frac{1}{7}$$

- **Ecuaciones Algebráicas:** Las Operaciones son polinomios y las variables son números complejos, reales, racionales. Se clasifican de acuerdo al grado (máximo) de los polinomios

  - Ecuaciones Lineales

$$\begin{aligned} 3y_1 + 5y_2 &= 2 \\ 5y_1 + 8y_2 &= 3 \end{aligned}$$

- Ecuaciones cuadráticas

$$y_1^2 + \frac{1}{2} y_1 y_2 = \frac{1}{3} y_2^2 - y_1^2 y_2 + y_2^2 - \frac{1}{7}$$

- Ecuaciones cúbicas, cuárticas, etc.

▪ **Ecuaciones Diofantinas:** Las Operaciones son polinomios y las variables son números enteros

▪ **Ecuaciones Trascendentes:** Las Operaciones son funciones no algebráicas

$$3\sin(y)\cos(y) = 1$$

$$\left\{ y = \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{2}{3}\right) \approx 20.9^\circ \right\}$$

▪ **Ecuaciones Funcionales**: las variables (incógnitas) son Funciones de una o varias variables.

- Ecuaciones Diferenciales: Involucra derivadas de la (función) incógnita
- Ecuaciones Integrales: Involucra integrales de la (función) incógnita
- Ecuaciones Integro-diferenciales: Involucra derivadas e integrales de la (función) incógnita

### 1.1.2. Ecuaciones Diferenciales

Son Ecuaciones Funcionales que relacionan los valores de la función incógnita y sus derivadas. Son ecuaciones en las que aparecen las variables independientes, la función incógnita y sus derivadas.

#### 1.1.2.1. Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO)

Incógnita: Función de una sola variable $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

- $y(x)$ o $y(t)$: $x$ (ó $t$) es la variable independiente, $y$ es la variable dependiente.
- $y'(x) = \frac{dy(x)}{dx}$ ó $\dot{y}(t) = \frac{dy(t)}{dt}$ es la primera derivada
- $y''(x) = \frac{d^2y(x)}{dx^2}$ ó $\ddot{y}(t) = \frac{d^2y(t)}{dt^2}$ es la segunda derivada
- $y^{(k)}(x) = \frac{d^ky(x)}{dx^k}$ ó $y^{(k)}(t) = \frac{d^ky(t)}{dt^k}$ es la $k-$ésima derivada

Ejemplos:

$$\begin{aligned} y'(x) &= \cos x \\ y'' + 9y &= e^{-2x} \\ y'y''' - \frac{3}{2}y'^2 &= 0\,. \end{aligned}$$

#### 1.1.2.2. Ecuación Diferencial Parcial (EDP)

- Incógnita: Función de *varias* variables $y : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

- $y(x)$: $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ son las variables independientes, $y$ es la variable dependiente.

Ejemplo:

$$\frac{\partial^2 y(x)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 y(x)}{\partial x_2^2} = 0\,.$$

## 1.2. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

- **Orden de la EDO:** Orden de la máxima derivada de la función incógnita que aparece en la ecuación. Una EDO es de orden $n$ si la máxima derivada que aparece en la ecuación es $y^{(n)}(x)$.

- **EDO Implícita:** Si la ecuación no está resuelta con respecto a la máxima derivada de la función incógnita.

- **EDO Explícita:** Si la ecuación está resuelta con respecto a la máxima derivada de la función incógnita.

### 1.2.1. EDO de Primer Orden

Ecuación Diferencial Ordinaria de Primer Orden en Forma Implícita:

$$F\left(x,\, y,\, y'\right) = 0\,.$$

Ejemplo:

$$\frac{y'}{x^3} - 4y^2 = 0\,.$$

Ecuación Diferencial Ordinaria de Primer Orden en Forma Explícita:

$$y' = f\left(x,\, y\right)\ .$$

Ejemplo:

$$y' = 4x^3y^2\,.$$

### 1.2.2. EDO de Segundo Orden

Ecuación Diferencial Ordinaria de Segundo Orden en Forma Implícita:

$$F\left(x,\, y,\, y',\, y''\right) = 0\,.$$

Ecuación Diferencial Ordinaria de Segundo Orden en Forma Explícita:

$$y'' = f\left(x,\, y,\, y'\right)\,.$$

Ejemplo: EDO de segundo orden lineal

$$y'' = f\left(x\right) y' + g\left(x\right) y + h\left(x\right)\,.$$

### 1.2.3. EDO de Orden $n$

Ecuación Diferencial Ordinaria de Orden $n$en Forma Implícita:

$$F\left(x,\, y,\, y',\cdots,\, y^{(n)}\right) = 0\,.$$

Ecuación Diferencial Ordinaria de Orden $n$ en Forma Explícita:

$$y^{(n)} = f\left(x,\, y,\, y',\cdots,\, y^{(n-1)}\right)\ .$$

### 1.2.4. Solución de una EDO

Una función

$$y = h\left(x\right)$$

es una *solución* (o *integral*) de la EDO

$$F\left(x,\, y,\, y'\right) = 0$$

en el intervalo abierto $a < x < b$ (incluye los casos $a = -\infty$, $b = \infty$) si

- $h\left(x\right)$ está definida y es diferenciable en el intervalo $a < x < b$, y
- la ecuación se convierte en una identidad si se reemplazan $y$, $y'$ por $h$, $h'$ (respectivamente), es decir,

$$F\left(x,\, h\left(x\right),\, h'\left(x\right)\right) \equiv 0\,,\ \forall x \in \left(a,\, b\right)\ .$$

El grafo de $h\,(x)$ se denomina también la *Curva Solución* o la *Curva Integral* de la EDO

**Ejemplo 1.1** *Verificación*

*La función* $y\,(x) = Ce^{-x^2}$, *para cualquier* $C \in \mathbb{R}$, *es solución en el intervalo* $x \in (-\infty,\, \infty)$ *de la EDO*

$$y' + 2xy = 0\,.$$

*Verificación:* $\forall x \in (-\infty,\, \infty)$

$$\frac{d}{dx}\left(Ce^{-x^2}\right) + 2x\left(Ce^{-x^2}\right) = -2x\left(Ce^{-x^2}\right) + 2x\left(Ce^{-x^2}\right) \equiv 0\,.$$

ç

**Ejemplo 1.2** *Solución por cálculo*

*La familia de soluciones de la ODE*

$$y' = \cos x\,,$$

*puede hallarse por integración de ambos lados*

$$\int y' dx = \int \cos x dx + c = \sin x + c \,,$$

*dónde c es una constante arbitraria (de integración).*

**Ejemplo 1.3** *Crecimiento y Decrecimiento Exponenciales*

*Por verificación se puede ver que una familia de soluciones de la ODE lineal*

$$y' = ky \,,$$

*es*

$$y(x) = ce^{kx} \,,$$

*dónde c es una constante arbitraria.*

- *Con $k > 0$ esta ecuación puede modelar crecimiento exponencial, como por ejemplo, una colonia de bacterias, población de animales o de seres humanos (Ley de Malthus).*

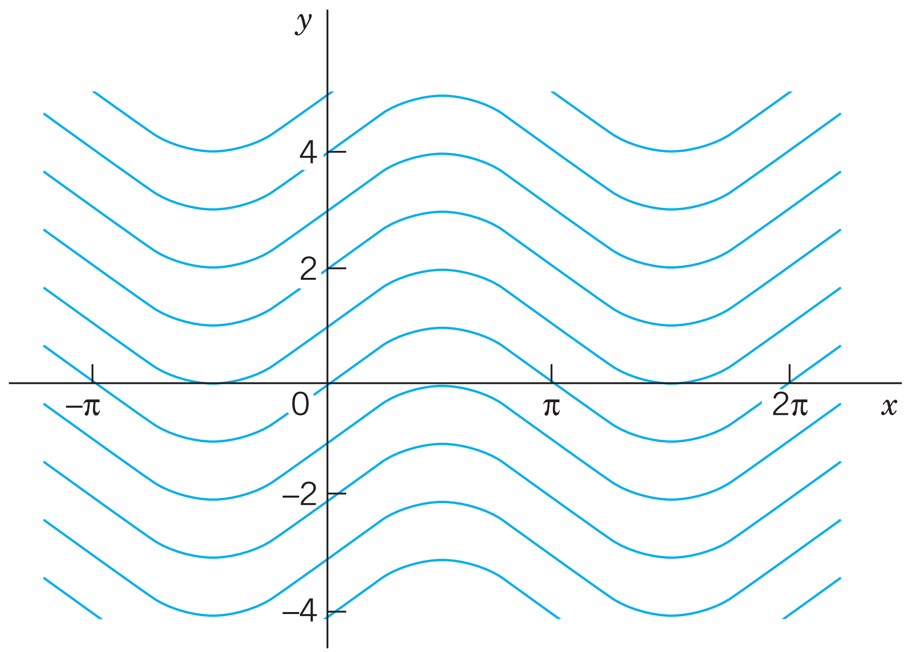


Figura 1.1: Soluciones de la ODE $y' = \cos x$

- *Con $k < 0$ esta ecuación puede modelar decrecimiento exponencial, como por ejemplo, una sustancia radioactiva.*

Una función
$$y = h(x)$$
es una *solución* (o *integral*) de la EDO de orden $n$
$$F\left(x,\, y,\, y',\cdots,\, y^{(n)}\right) = 0$$
en el intervalo abierto $a < x < b$ (incluye los casos $a = -\infty$, $b = \infty$) si

- $h(x)$ está definida y es $n$ veces diferenciable en el intervalo $a < x < b$, y
- la ecuación se convierte en una identidad si se reemplazan $y,\, y',\cdots,\, y^{(n)}$ por $h,\, h',\cdots,\, h^{(n)}$ (respectivamente), es decir,
$$F\left(x,\, h(x),\, h'(x),\cdots,\, h^{(n)}(x)\right) \equiv 0\,,\ \forall x \in (a,\, b)\ .$$

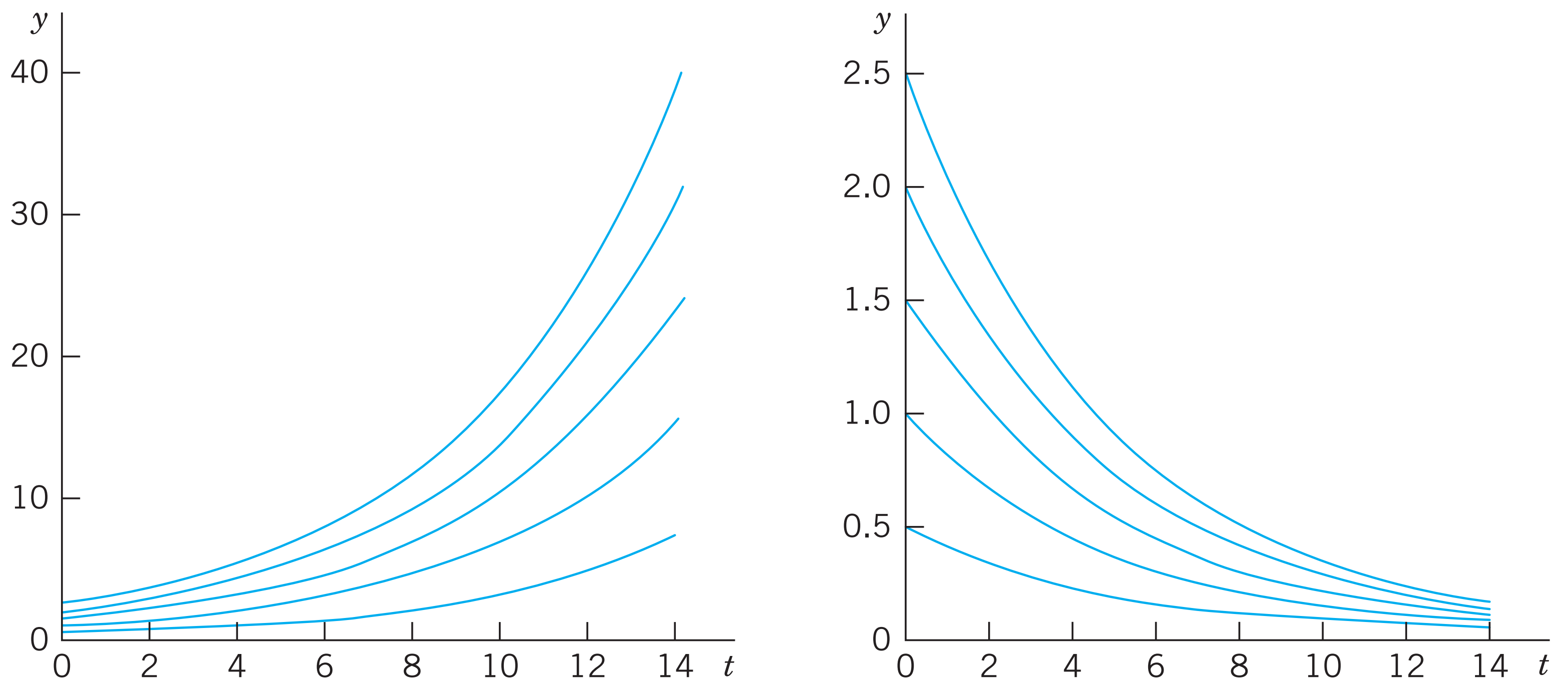


Figura 1.2: Soluciones de la ODE $y' = ky$

### 1.2.5. Solución General y Particular de una EDO

La *solución general* o *solución completa* de una EDO de primer orden es una función

$$y = h\,(x,\, C)\ ,$$

que depende de un parámetro real $C$, tal que para cualquier valor del parámetro (en un conjunto $C \in M$), $h\,(x,\, C)$ es una *solución* (o *integral*) de la EDO

$$F\,(x,\, y,\, y') = 0\,.$$

Si se especifica un valor de la constante $C$ se obtiene una *solución particular* (sin constantes arbitrarias).

La *solución general* o *solución completa* de una EDO de orden $n$ es una función

$$y = h\,(x,\, C_1, \cdots,\, C_n)\ ,$$

que depende de $n$ parámetros reales $(C_1, \cdots,\, C_n)$, tal que para cualquier valor del parámetro (en un conjunto $(C_1, \cdots,\, C_n) \in M$), $h\,(x,\, C_1, \cdots,\, C_n)$

es una *solución* (o *integral*) de la EDO

$$F\left(x,\, y,\, y',\cdots,\, y^{(n)}\right) = 0\,.$$

Si se especifica un valor de la constante $C$ se obtiene una *solución particular* (sin constantes arbitrarias).

Solución Singular: Son soluciones particulares de una EDO que no se pueden obtener de la solución general

**Ejemplo 1.4** *Solución singular*

*La ODE*

$$\left(y'\right)^2 - xy' + y = 0\,,$$

*tiene como solución general (verificar por substitución)*

$$y\left(x\right) = cx - c^2\,,$$

*dónde* $c$ *es una constante arbitraria.*

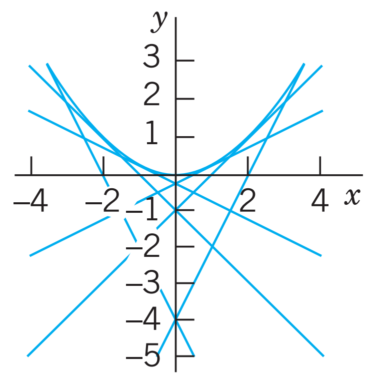


Figura 1.3: Soluciones particulares y solución singular de la ODE $(y')^2 - xy' + y = 0\,.$

*Solución singular*

$$y\,(x) = \frac{x^2}{4}\,.$$

## 1.3. Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden

Considere la EDO de primer orden en forma explícita

$$y' = f(x, y) \ .$$

La solución general contiene una constante arbitraria $C$.

### 1.3.1. Problema de valores (o condiciones) iniciales: PCI

Una forma de especificar la solución particular es mediante una *condición inicial* (C.I.), es decir,

$$y(x_0) = y_0 \ ,$$

con valores dados $x_0$ e $y_0$.

Un problema de valores iniciales es:

- Una ODE (explícita por ejemplo): $y' = f(x, y)$ ,
- Una condición inicial: $y(x_0) = y_0$ .

**Ejemplo 1.5** *Crecimiento y Decrecimiento Exponenciales*
*Resuelva el problem de valores iniciales*

$$y' = 3y\,,\; y(0) = 5.7\,.$$

*La solución general es*

$$y(x) = ce^{3x}\,.$$

*De la solución general y la condición inicial se obtiene*

$$y(0) = ce^0 = c = 5.7\,.$$

*Así que la (única) solución del problema de valores iniciales es:* $y(x) = 5.7e^{3x}$.

### 1.3.2. Interpretación Geométrica y gráfica

Del cálculo: $y'(x)$ es la pendiente de $y(x)$. $\Rightarrow$ Curva solución de

$$y' = f(x,\, y)$$

que pasa por el punto $(x_0,\, y_0)$ debe tener en ese punto la pendiente $y'(x_0)$ igual al valor de $f$ en ese punto, es decir,

$$y'(x_0) = f(x_0,\, y_0)\ .$$

Podemos mostrar las direcciones de las curvas solución de una EDO dibujando pequeños segmentos de recta en el plano $xy$. Esto representa el *campo de direcciones* (o *campo de pendientes*), en el que se pueden ajustar (aproximar) curvas solución. Esto puede revelar propiedades típicas de la familia de soluciones (ver Figura 1.4).

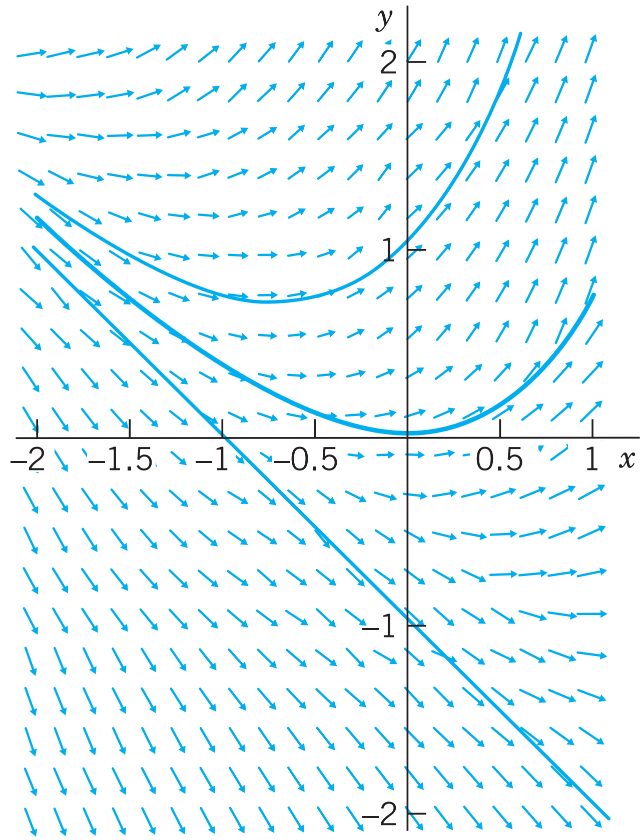


Figura 1.4: Campo de direcciones de $y' = y + x$, con tres soluciones aproximadas que pasan por $(0,\, 1)$, $(0,\, 0)$, $(0,\, -1)$.

# Lección 2

# Métodos de solución de EDOs de Primer Orden

Veremos algunos tipos de EDOs que se pueden resolver fácilmente:

- EDOs Separables y EDOs reducibles a separables.
- EDOs Exactas y Factores de Integración
- EDOs lineales, Ecuación de Bernoulli

## 2.1. EDOs Separables: Método de Separación de Variables.

Considere una EDO que se pueda escribir de la forma

$$\boxed{g(y)\, y' = f(x)}\,.$$

Integrando a ambos lados con respecto a $x$ se obtiene

$$\int g(y)\left(\frac{dy}{dx}\right) dx = \int f(x)\, dx + C\,,$$

que se puede escribir

$$\boxed{\int g(y)\,dy = \int f(x)\,dx + C}.$$

Evaluando las integrales obtenemos una solución general de la EDO. Método de Separación de Variables, ya que el lado izquierdo solo depende de $y$ y el lado derecho solo de $x$.

**Ejemplo 2.1** *EDO separable*

*La EDO*

$$y' = 1 + y^2$$

*es separable, porque puede ser escrita como*

$$\frac{dy}{1+y^2} = dx \Rightarrow \int \frac{dy}{1+y^2} = \int dx + C \Rightarrow \arctan y = x + C \Leftrightarrow y = \tan(x+C)$$

**Comentario 2.2** $\boxed{\text{Es muy importante introducir la constante de integración inmediatamente después de realizar la integración!}}$

*Si se realiza de la siguiente manera el resultado es incorrecto!*

$$\frac{dy}{1+y^2} = dx \Rightarrow \int \frac{dy}{1+y^2} = \int dx \Rightarrow \arctan y = x \Rightarrow y = \tan x + C\,.$$

**Ejemplo 2.3** *EDO separable*

*La EDO*

$$y' = (x+1)\,e^{-x} y^2$$

*es separable, porque puede ser escrita como*

$$\frac{dy}{y^2} = (x+1)\,e^{-x} dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y^2} = \int (x+1)\,e^{-x} dx + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{y} = -\,(x+2)\,e^{-x} + C \Leftrightarrow y = \frac{1}{(x+2)\,e^{-x} - C}\,.$$

**Ejemplo 2.4** *Problema de C.I. (condiciones iniciales)*

*Resuelva el Problema de C.I.*

$$y' = -2xy\,,\ y\,(0) = 1.8\,.$$

***Solución:*** *La EDO es separable*

$$\frac{dy}{y} = -2xdx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -2\int xdx + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln y = -x^2 + \tilde{C} \Leftrightarrow y = Ce^{-x^2}\,.$$

*Esta es la Solución General. De la C.I.*

$$y\,(0) = Ce^0 = C = 1.8\,,$$

*y la solución particular del Problema de C.I. es*

$$y\,(x) = 1.8e^{-x^2}\,.$$

*Esta solución particular representa una curva en forma de campana (ver Figura 2.1)*

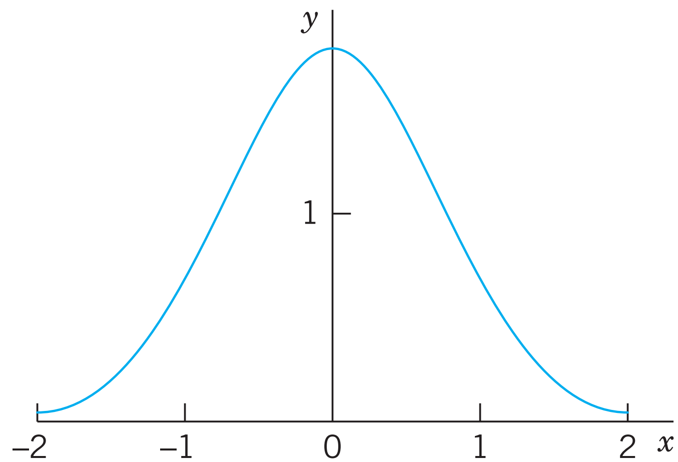


Figura 2.1: Solución particular en forma de Campana de $y' = -2xy$ .

## 2.2. EDOs reducibles a EDOs Separables

Algunas EDOs pueden ser reducidas a separables mediante una transformación de la variable $y$.

### 2.2.1. EDOs "homogéneas"

Sea una EDO del tipo

$$\boxed{y' = f\left(\frac{y}{x}\right)}\,.$$

$f$ es una función contínua de $\frac{y}{x}$. La transformación

$$u(x) = \frac{y(x)}{x} \Rightarrow y(x) = u(x)\,x \Rightarrow y' = u'x + u\,.$$

Substituyendo en la EDO se obtiene

$$u'x + u = f(u) \Rightarrow u'x = f(u) - u\,.$$

Si $f(u) - u \neq 0$ la EDO resultante es separable

$$\frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x}\,.$$

**Ejemplo 2.5** *Reducción a una forma separable*
*Resuelva la EDO*

$$2xyy' = y^2 - x^2\,.$$

***Solución:*** *Obtenemos la froma explícita usual dividiendo por* $2xy$

$$y' = \frac{y}{2x} - \frac{x}{2y}\,.$$

*Realizando la transformación* $y(x) = u(x)\,x$ *se obtiene*

$$u'x + u = \frac{u}{2} - \frac{1}{2u} \Rightarrow u'x = -\frac{u^2+1}{2u}\,.$$

*Esta EDO es de variables separables*

$$\frac{2u}{u^2+1}du = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{2u}{u^2+1}du = -\int \frac{dx}{x} + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln\left(1+u^2\right) = -\ln|x| + \tilde{C} \Rightarrow \ln\left(1+u^2\right) = \ln\frac{1}{|x|} + \tilde{C}\,.$$

*Tomando exponenciales en ambos lados se obtiene*

$$1+u^2 = \frac{C}{x} \Leftrightarrow 1+\left(\frac{y}{x}\right)^2 = \frac{C}{x} \Rightarrow x^2+y^2 = Cx \Rightarrow \left(x-\frac{C}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{C^2}{4}\,.$$

*Esta es la Solución General de la EDO y representa una familia de círculos que pasan por el origen, con centros en el eje $x$ (ver Figura 2.2)*

### 2.2.2. Otra EDO reducible a separable

Sea una EDO del tipo

$$y' = f\,(ax+by+c)\ ,\ b \neq 0\,.$$

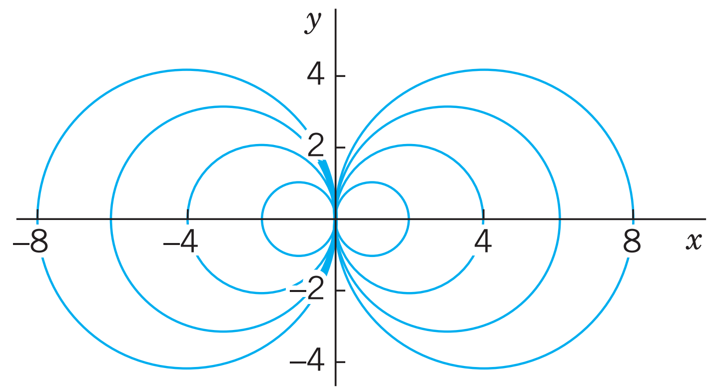


Figura 2.2: Solución General (familia de círculos) de $2xyy' = y^2 - x^2$.

$f$ es una función contínua. Considere la transformación

$$u(x) = ax + by(x) + c\,.$$

Si $y(x)$ es una solución, entonces se satisface para $u(x)$

$$u' = a + by'(x) = a + bf(u)\ .$$

La EDO resultante es de variables separables.

**Ejemplo 2.6** *Halle la Solución General de la ODE*

$$y' = (x+y)^2 \; .$$

*Para* $u(x) = x + y(x)$ *se cumple que*

$$u' = 1 + y' = 1 + (x+y)^2 = 1 + u^2 \, ,$$

*cuya solución general es*

$$u(x) = \tan(x + C) \; .$$

*Por lo tanto la solución general de la EDO original es*

$$y(x) = \tan(x + C) - x \, .$$

## 2.3. EDOs Exactas

Si una función $u\,(x,\,y)$ tiene derivadas parciales contínuas, su **diferencial** (o diferencial total) es

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\,.$$

De esto se deduce que si $u\,(x,\,y) = C$, $C$ constante, entonces $du = 0$.

**Ejemplo 2.7** *Si*

$$u = x + x^2y^3 = C$$

*entonces*

$$du = \left(1 + 2xy^3\right)dx + 3x^2y^2dy = 0$$

*o sea*

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{1+2xy^3}{3x^2y^2}\,.$$

*Esta EDO se puede resolver realizando el procedimiento inverso! Idea básica de un método muy poderoso.*

Una EDO de primer orden

$$M(x,\, y) + N(x,\, y)\, y' = 0\,,$$

escrita como

$$\boxed{M(x,\, y)\, dx + N(x,\, y)\, dy{=}0}\,, \tag{2.1}$$

se denomina una Ecuación Diferencial Exacta si la forma diferencial $M(x,\, y)\, dx + N(x,\, y)\, dy$ es exacta, es decir, es la diferencial de una función $u(x,\, y)$,

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy\,. \tag{2.2}$$

La EDO (2.1) se puede entonces escribir como

$$du = 0\,,$$

y la solución general de (2.1) es

$$\boxed{u\,(x,\,y) = C}\,. \tag{2.3}$$

Esta es una **solución implícita**, en contraste con la **solución explícita** $y = h\,(x)$.

Comparando (2.1) y (2.2) observamos que (2.1) es una diferencial exacta si existe una función $u\,(x,\,y)$ tal que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M\,,\ \frac{\partial u}{\partial y} = N\,.$$

De aqui se puede obtener una fórmula para verificar si (2.1) es exacta o no: Sean $M$ y $N$ contínuas, con primeras derivadas parciales también contínuas en una región del plano $xy$ cuya frontera es una curva cerrada sin intersecciones con sigo misma. Diferenciando las expresiones anteriores se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial M}{\partial y}, \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial N}{\partial x}.
\end{aligned}$$

Por la hipótesis de continuidad de las dos derivadas parciales de segundo orden, deben ser iguales, y por lo tanto

$$\boxed{\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}}. \tag{2.4}$$

Esta condición es necesaria y suficiente para que (2.1) sea una Ecuación Diferencial Exacta.

Si (2.1) es Exacta, la función $u(x,\, y)$ puede obtenerse por inspección o de la siguiente forma sistemática

- De $\frac{\partial u}{\partial x} = M$ se obtiene mediante integración con respecto a $x$

$$\boxed{u = \int M dx + k(y)}. \tag{2.5}$$

En la integración, $y$se toma como constante, y $k\left(y\right)$ juega el papel de una "constante" de integración. Para determinar $k\left(y\right)$, obtenemos $\frac{\partial u}{\partial y}$ de (2.5), usamos $\frac{\partial u}{\partial y}=N$ para obtener $\frac{dk}{dy}$ y lo integramos para obtener a $k$.

- De $\frac{\partial u}{\partial y}=N$ se obtiene mediante integración con respecto a $y$

$$\boxed{u=\int N dy+l\left(x\right)}. \tag{2.6}$$

Para determinar $l\left(x\right)$, obtenemos $\frac{\partial u}{\partial x}$ de (2.6), usamos $\frac{\partial u}{\partial x}=M$ para obtener $\frac{dl}{dx}$ y lo integramos para obtener a $l$.

**Ejemplo 2.8** *EDO Exacta*
*Resuelva la EDO*

$$\cos\left(x+y\right)dx+\left(3y^2+2y+\cos\left(x+y\right)\right)dy=0\,.$$

***Solución: Paso 1. Verificación de exactitud.***

*Ecuación de la forma (2.1) con*

$$M = \cos(x+y)\ ,\ N = 3y^2 + 2y + \cos(x+y)\ .$$

*Por lo tanto, la condición de exactitud (2.4)*

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\sin(x+y) = \frac{\partial N}{\partial x} = -\sin(x+y)$$

*se satisface.*

***Paso 2. Solución General Implícita.*** *De (2.5) obtenemos mediante integración*

$$u = \int M dx + k(y) = \int \cos(x+y)\, dx + k(y) = \sin(x+y) + k(y)\ .$$

*Para hallar* $k(y)$ *diferenciamos esta expresión con respecto a* $y$ *y usamos la fórmula* $\frac{\partial u}{\partial y} = N$, *obteniendo*

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \cos(x+y) + \frac{dk(y)}{dy} = N = 3y^2 + 2y + \cos(x+y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dk\left(y\right)}{dy} = 3y^2 + 2y \Rightarrow k = y^3 + y^2 + \tilde{C}\,.$$

*Así obtenemos la solución general*

$$u\left(x,\,y\right) = \sin\left(x+y\right) + y^3 + y^2 = C\,.$$

***Paso 3. Verificar la Solución General Implícita.*** *Se puede verificar mediante la diferenciación (implícita) de la solución implícita* $u\left(x,\,y\right) = C$ *si se obtiene la EDO:*

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = \cos\left(x+y\right)dx + \big(\cos\left(x+y\right) + 3y^2 + 2y\big)\,dy = dC = 0\,.$$

*Esto completa la verificación.*

**Ejemplo 2.9** *Un problema de C.I.*

*Resuelva el problema de C.I.*

$$\left(\cos y \sinh x + 1\right)dx - \sin y \cosh x dy = 0\,,\;\; y\left(1\right) = 2\,.$$

***Solución:*** *Se puede verificar que la EDO es exacta. Para encontrar a u usamos (2.6)*

$$u = \int N dy + l(x) = -\int \sin y \cosh x dy + l(x) = \cos y \cosh x + l(x)\ .$$

*Para hallar la* $l(x)$ *usamos*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos y \sinh x + \frac{dl(x)}{dx} = M = \cos y \sinh x + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dl(x)}{dx} = 1 \Rightarrow l(x) = x + C^*$$

*entonces la solución general es*

$$u(x,\ y) = \cos y \cosh x + x = C\ .$$

*De la C.I.*

$$u(1,\ 2) = \cos 2 \cosh 1 + 1 = 0.358 = C\ .$$

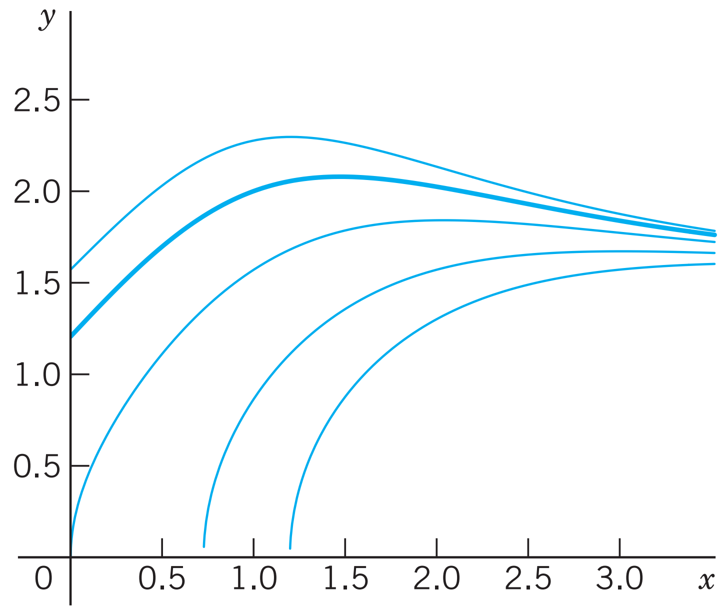


Figura 2.3: Soluciones Particulares $u\,(x,\ y) = \cos y \cosh x + x = C$ para valores de $C = 0,\ 0.358,\ 1,\ 2,\ 3.$

*La solución particular es entonces* $u\,(x,\,y) = \cos y \cosh x + x = 0.358$ *(ver Figura 2.3)*

## 2.4. Factor de Integración: ODEs reducibles a Exactas.

**Ejemplo 2.10** *Motivación*

*La ODE*

$$-ydx + xdy = 0$$

*no es exacta, ya que no se satisface (2.4):*

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -1 \neq \frac{\partial N}{\partial x} = 1\,.$$

*Si multiplicamos la EDO por* $^1/_{x^2}$ *obtenemos la ODE exacta*

$$-\frac{y}{x^2}dx + \frac{1}{x}dy = d\left(\frac{y}{x}\right) = 0\,.$$

*Por integración obtenemos la solución general*

$$\frac{y}{x} = C\,,$$

$C$ *constante.*

La idea derivada del ejemplo es: Multiplique una EDO no exacta

$$P\,(x,\,y)\,dx + Q\,(x,\,y)\,dy = 0\,, \tag{2.7}$$

por una función (en general de $x$ e $y$) $F\,(x,\,y)$ de tal forma que la EDO resultante

$$F\,(x,\,y)\,P\,(x,\,y)\,dx + F\,(x,\,y)\,Q\,(x,\,y)\,dy = 0 \tag{2.8}$$

sea exacta. $F\,(x,\,y)$ is denominada Factor de Integración de (2.7).

**Ejemplo 2.11** *El factor de integración en el ejemplo 2.10 es* $F = {}^{1}/_{x^2}$*. Es notable que uno puede encontrar otros factores de integración para esta ecuación:*

- $F = \frac{1}{y^2} \Rightarrow \frac{-ydx+xdy}{y^2} = d\left(\frac{x}{y}\right) = 0\,,$
- $F = \frac{1}{xy} \Rightarrow \frac{-ydx+xdy}{xy} = -d\left(\ln\frac{x}{y}\right) = 0\,,$
- $F = \frac{1}{x^2+y^2} \Rightarrow \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2} = d\left(\arctan\frac{x}{y}\right) = 0\,.$

# ¿Cómo hallar Factores de Integración?

La ecuación (2.8) es exacta si se satisface la condición (ver (2.4))

$$\frac{\partial\left(FP\right)}{\partial y} = \frac{\partial\left(FQ\right)}{\partial x}\,,$$

que, usando la regla del producto, puede escribirse como (los subíndices indican derivadas parciales)

$$F_yP + FP_y = F_xQ + FQ_x\,.$$

En el caso general hallar $F$ de esta expresión es muy complicado. En los casos en que exista un Factor de Integración $F$ que dependa de una sola variable, se puede resolver la expresión.

### 2.4.1. $F = F(x)$

La expresión anterior se reduce a

$$FP_y = F'Q + FQ_x \Rightarrow \frac{1}{F}\frac{dF}{dx} = R\,,\ R = \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\,. \tag{2.9}$$

Entonces se obtiene el siguiente resultado:

**Teorema 2.12** *Factor de Integración $F(x)$*

*Si (2.7) es tal que $R$ en (2.9) sólo depende de $x$, entonces (2.7) tiene un factor de integración $F = F(x)$, que se obtiene integrando (2.9) y tomando exponentes en ambos lados*

$$F(x) = \exp \int R(x)\, dx\,.$$

### 2.4.2. $F^* = F^*(y)$

La expresión anterior se reduce a

$$F^{*\prime}P+F^*P_y = F^*Q_x \Rightarrow \frac{1}{F^*}\frac{dF^*}{dy} = R^*\,,\; R^* = \frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\,. \quad (2.10)$$

Entonces se obtiene el siguiente resultado:

**Teorema 2.13** *Factor de Integración $F(y)$*

*Si (2.7) es tal que $R^*$ en (2.10) sólo depende de $y$, entonces (2.7) tiene un factor de integración $F^* = F^*(y)$, que se obtiene integrando (2.10) y tomando exponentes en ambos lados*

$$F^*(y) = \exp\int R^*(y)\,dy\,.$$

**Ejemplo 2.14** *Encuentre un Factor de Integración para el Problema de Valor Inicial*

$$\left(e^{x+y} + ye^y\right)dx + (xe^y - 1)\,dy = 0,\; y(0) = -1\,.$$

**Paso1** *No exactitud: La condición de exactitud (2.4) no se satisface*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = e^{x+y} + ye^y + e^y \neq \frac{\partial Q}{\partial x} = e^y\,.$$

**Paso2** *Factor de Integración. El Teorema 2.12 falla porque R en (2.9) depende de* $(x,\, y)$*:*

$$R = \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \frac{e^{x+y} + ye^y + e^y - e^y}{xe^y - 1}\,.$$

*Intento con el Teorema 2.13.* $R^*$ *en (2.10) es*

$$R^* = \frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = -\frac{e^{x+y} + ye^y + e^y - e^y}{e^{x+y} + ye^y} = -1\,.$$

*Por lo tanto un Factor de Integración es*

$$F^*(y) = \exp\int R^*(y)\,dy = e^{-y}\,.$$

*Se obtiene entonces la EDO Exacta*

$$e^{-y}\left(e^{x+y}+ye^{y}\right)dx+e^{-y}\left(xe^{y}-1\right)dy=\left(e^{x}+y\right)dx+\left(x-e^{-y}\right)dy=0\,.$$

*Integrando se obtiene*

$$u=\int\left(e^{x}+y\right)dx=e^{x}+xy+k\left(y\right)\,.$$

*Usando* $\frac{\partial u}{\partial y}=N$ *obtenemos*

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x+k'\left(y\right)=x-e^{-y}\Rightarrow\frac{dk}{dy}=-e^{-y}\Rightarrow k=e^{-y}+C^{*}\,.$$

*Por lo tanto la solución general de la EDO es*

$$u\left(x,\,y\right)=e^{x}+xy+e^{-y}=C\,.$$

**Paso3** *Solución particular: La condición inicial* $y(0) = -1$ *implica que* $u(0,\,-1) = 1 + e = 3.72$*. Por lo tanto la solución al problema de valor inicial es*

$$u(x,\,y) = e^{x} + xy + e^{-y} = 1 + e = 3.72\,.$$

*(ver Figura 2.4).*

## 2.5. EDOs lineales

Una EDO de primer orden es lineal si se puede escribir de la forma

$$y' + p(x)\,y = r(x)\ . \tag{2.11}$$

Esta ecuación es lineal en $y$ y en $y'$. Las funciones $p(x)$ y $r(x)$ pueden ser funciones arbitrarias de $x$.

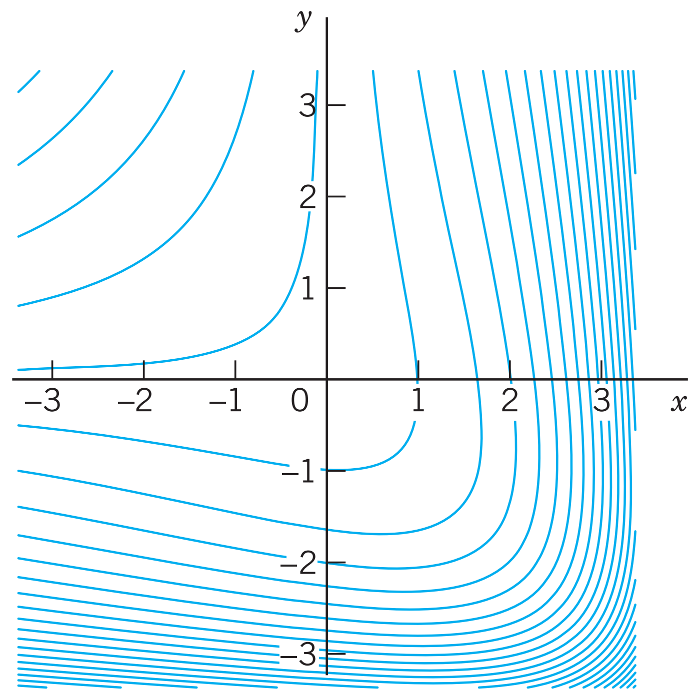


Figura 2.4: Curvas de nivel de $u\,(x,\, y) = e^{x} + xy + e^{-y} = C$.

### 2.5.1. EDO lineal homogénea

Cuando en el intervalo $J = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ el término $r(x) \equiv 0$ en $J$ la EDO (2.11) se convierte en

$$y' + p(x)\, y = 0\,,$$

y se denomina **homogénea**. Separando variables e integrando se obtiene

$$\frac{dy}{y} = -p(x)\, dx \Rightarrow \ln|y| = -\int p(x)\, dx + C^*\,.$$

Tomando exponentes en ambos lados obtenemos la solución general de la ecuación homogénea

$$y(x) = Ce^{-\int p(x) dx}\,.$$

Si se elige $C = 0$ se obtiene la **solución trivial** $y(x) = 0$ en el intervalo $J$.

### 2.5.2. EDO lineal no homogénea

Ahora resolvemos la EDO (2.11) en el caso en que $r(x)$ no es cero en el intervalo $J$, en cuyo caso (2.11) es **no homogénea**.

Método de solución: (2.11) tiene un Factor de Integración $F = F(x)$ (que depende solo de $x$). Se puede hallar mediante el Teorema 2.12 o directamente.

Procedemos Directamente:

- Se multiplica (2.11) por $F(x)$

$$Fy' + Fpy = Fr\,. \tag{2.12}$$

  El lado izquierdo es la derivada $(Fy)' = F'y + Fy'$ del producto $Fy$ si

$$pFy = F'y \Rightarrow pF = F'\,.$$

- Por separación de variables

$$\frac{dF}{F} = pdx \Rightarrow \ln|F| = h \triangleq \int pdx \Rightarrow F = e^h \, .$$

- Dada esta $F$ y con $h' = p$ la EDO (2.12) se convierte en

$$e^h y' + e^h py = e^h y' + \left(e^h\right)' y = \left(e^h y\right)' = e^h r \, .$$

Por integración

$$e^h y = \int e^h r + C \, .$$

Dividiendo por $e^h$se obtiene la expresión deseada

$$\boxed{y\,(x) = e^{-h}C + e^{-h}\textstyle\int e^h r} \, , \; h = \int p\,(x)\, dx \, . \tag{2.13}$$

Esto reduce la tarea de resolver la EDO (2.11) a la de evaluar integrales.

Nótese que en (2.13):

1. La constante de integración de $h$ no afecta el resultado.

2. Dada una Condición Inicial (C.I.), la única cantidad que depende de esta C.I. es $C$.

3. La respuesta total es la suma de dos términos: La respuesta a la C.I. + La respuesta a la entrada $r(x)$

$$y(x) = \underbrace{e^{-h}C}_{\text{Rpta a C.I.}} + \underbrace{e^{-h}\int e^{h}r}_{\text{Rpta a entrada } r}$$

**Ejemplo 2.15** *Resuelva el Problema de Valores Iniciales*

$$y' + y\tan x = \sin 2x\,,\ \ y(0) = 1\,.$$

***Solución:*** *Aqui* $p = \tan x,\ r = \sin 2x = 2\sin x \cos x,\ y$

$$h = \int p dx = \int \tan x dx = \ln |\sec x| \ .$$

*De aqui vemos que en (2.13)*

$$e^h = \sec x \, , \ e^{-h} = \cos x \, , \ e^h r = (\sec x)(2\sin x \cos x) = 2\sin x \, ,$$

*y la solución general de la EDO es*

$$y(x) = \cos x \left( 2 \int \sin x \, dx + C \right) = C\cos x - 2\cos^2 x \, .$$

*De la C.I.*

$$y(0) = 1 \Rightarrow 1 = C\cos 0 - 2\cos^2 0 = C - 2 \Rightarrow C = 3 \, ,$$

*y la solución del Problema de Condiciones Iniciales es*

$$y(x) = \underbrace{3\cos x}_{Rpta\ a\ C.I.} \quad \underbrace{-2\cos^2 x}_{Rpta\ a\ entrada\ \sin 2x} \, .$$

**Ejemplo 2.16** *Circuito Eléctrico*

*Modele el circuito RL de la Figura 2.5 y resuelva la EDO resultante para la corriente $I(t)$ (en Amperios A), dónde $t$ es el tiempo. Asuma que el circuito tiene como Fuente de Voltaje $E(t)$ a una batería de $E = 48$ V (Voltios) constante, una resistencia de $R = 11\ \Omega$ (ohmios) y una inductancia de $L = 0.1$ H (Henrios) y que la corriente inicial es cero.*

***Solución:*** *De acuerdo a las leyes de Kirchhoff se tiene que*

$$LI' + RI = E(t) \Rightarrow I' + \frac{R}{L}I = \frac{E(t)}{L}.$$

*Se puede obtener la solución general de esta EDO de (2.13) con $x = t$, $y = I$, $p = {}^{R}\!/_{L}$, $h = ({}^{R}\!/_{L})\,t$*

$$I(t) = e^{-\frac{R}{L}t}\left(C + \int e^{\frac{R}{L}t}\frac{E(t)}{L}dt\right).$$

*Integrando*

$$I(t) = e^{-\frac{R}{L}t}\left(C + \frac{E}{L}\frac{L}{R}e^{\frac{R}{L}t}\right) = e^{-\frac{R}{L}t}C + \frac{E}{R} = e^{-110t}C + \frac{48}{11}\,.$$

*La C.I.* $I(0) = 0$ *implica*

$$I(0) = e^{0}\left(C + \frac{E}{R}e^{0}\right) = 0 \Rightarrow C = -\frac{E}{R}\,,$$

*así que la solución particular es*

$$I(t) = -e^{-110t}\frac{48}{11} + \frac{48}{11} = \frac{48}{11}\left(1 - e^{-110t}\right)\,.$$

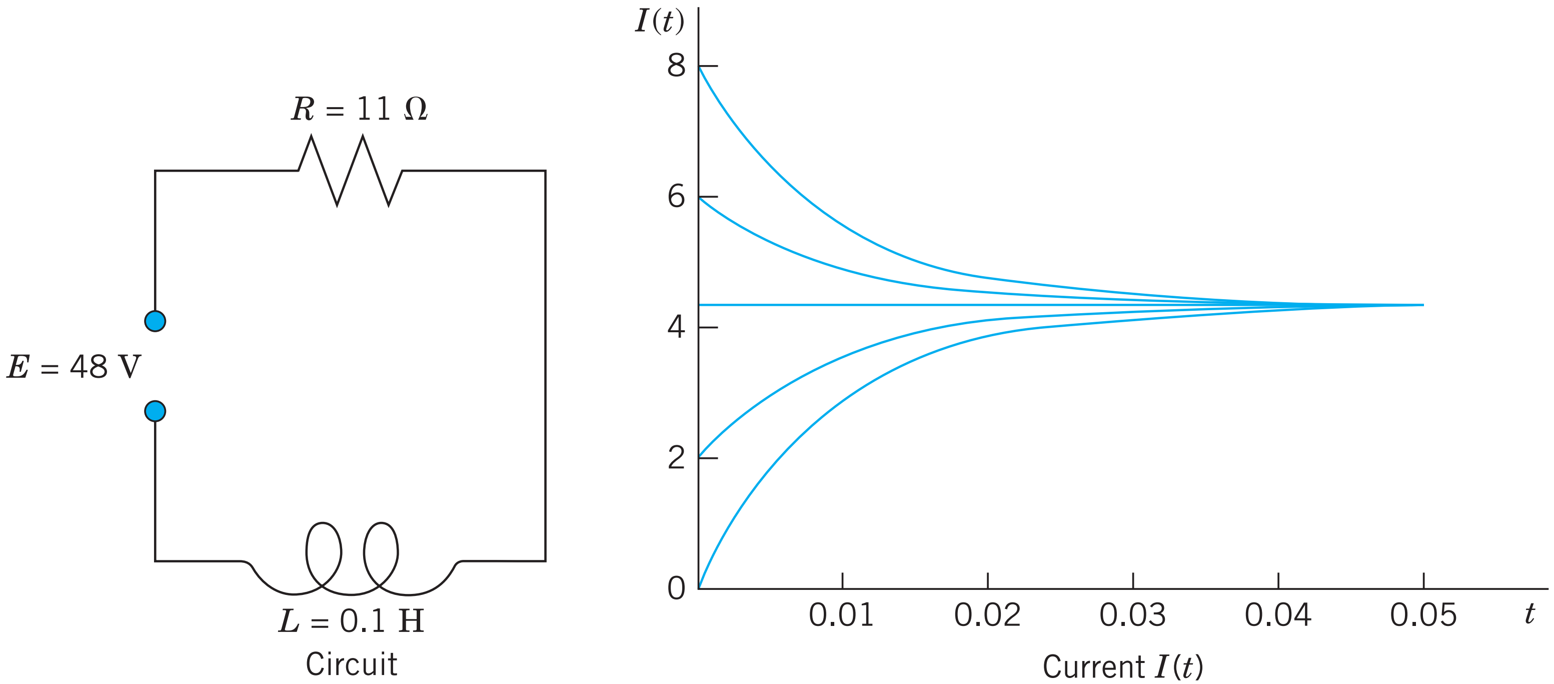


Figura 2.5: Circuito RL.

## 2.6. ODE de Bernoulli: Reducción a una ODE Lineal

La Ecuación de Bernoulli es

$$\boxed{y' + p(x)\, y = g(x)\, y^a}\,,\ a \in \mathbb{R}\,. \tag{2.14}$$

Si $a = 0$ o $a = 1$ la ODE (2.14) es lineal. En todos los demás casos es **no lineal**.

Usando la transformación

$$u(x) = [y(x)]^{1-a}\ ,$$

se obtiene que

$$u' = (1-a)\, y^{-a} y' = (1-a)\, y^{-a}\left(g y^a - p y\right) = (1-a)\left(g - p y^{1-a}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u' + (1-a)\, p u = (1-a)\, g\,,$$

que es una EDO Lineal.

**Ejemplo 2.17** *Ecuación Logística*

*Resuelva la siguiente ecuación de Bernoulli, conocida como* ***Ecuación Logística*** *(o* ***Ecuación de Verhulst****):*

$$\boxed{y' = Ay - By^2}\,.$$

***Solución:*** *En este caso* $a = 2$ *y el cambio de variable es* $u = y^{1-a} = y^{-1}$. *Para uobtenemos*

$$u' = -y^{-2}y' = -y^{-2}\left(Ay - By^2\right) = B - Ay^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u' + Au = B\,.$$

*La solución general es*

$$u = Ce^{-At} + \frac{B}{A} \Rightarrow y\left(t\right) = \frac{1}{u\left(t\right)} = \frac{1}{Ce^{-At} + \frac{B}{A}}\,.$$

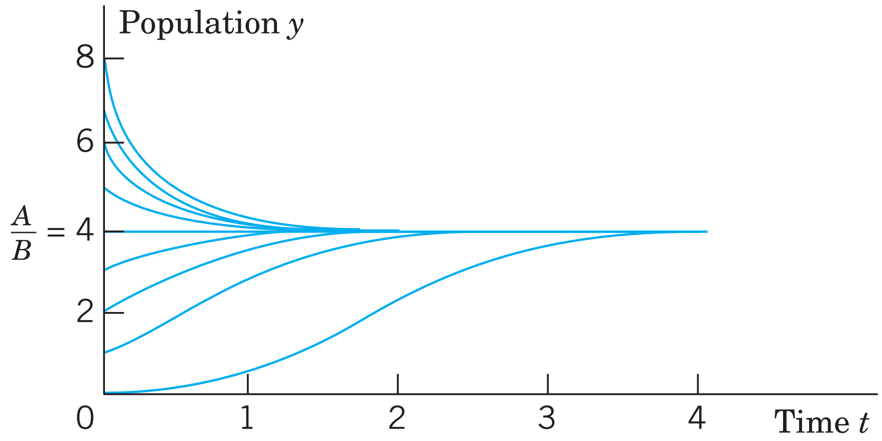


Figura 2.6: Modelo de población Logístico. Curvas con $^{A}/_{B} = 4$.

*Podemos ver que* $y \equiv 0$ *(*$y\,(t) = 0$ *para todo* $t$*) es también una solución.*

# Bibliografía


[1] Erwin Kreyszig. *Advanced Engineering Mathematics*. 10th Edition. New York: Academic Press, 1975.

[2] Wolfgang Walter. *Gewöhnliche Differentialgleichungen: Eine Einführung*. 7. Auflage, Springer-Verlag, 2000.

[3] https://en.wikipedia.org/wiki/Equation

[4] https://en.wikipedia.org/wiki/Operation_(mathematics)